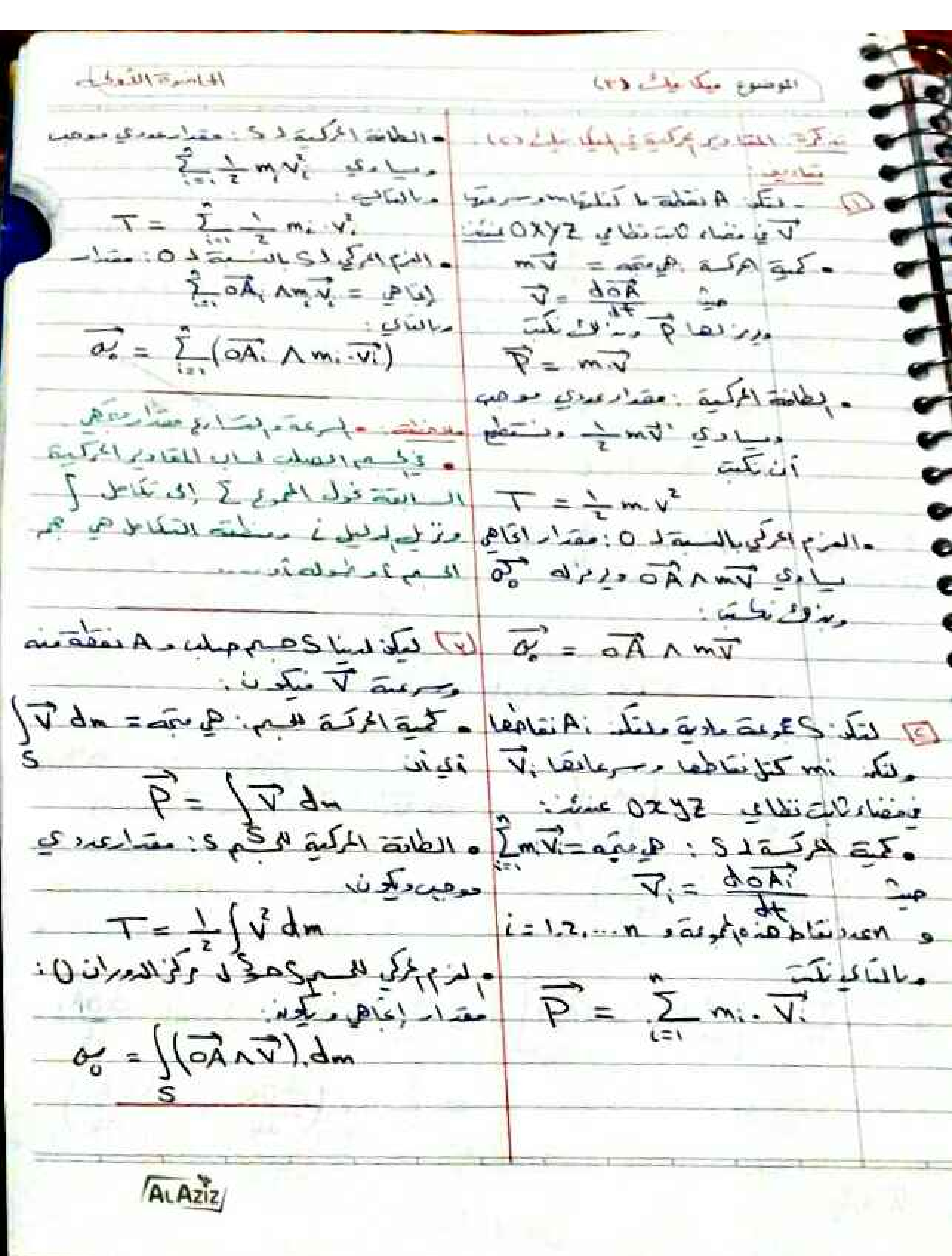


تذكرة: المقادير الحركية في الميكانيك (١).

تعاريف:

(١) - لتكن A نقطة ما كتلتها m وسرعتها $\vec{V}$ في فضاء ثابت نظامي OXYZ عندئذ:

• كمية الحركة: هي متجه = $m\vec{V}$

حيث $\vec{V} = \frac{d\vec{OA}}{dt}$

ونرمز لها $\vec{P}$ وبذلك نكتب

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

• الطاقة الحركية: مقدار عددي موجب ويساوي $\frac{1}{2}mV^2$ ونستطيع أن نكتب

$$T = \frac{1}{2}m.v^2$$

• العزم الحركي بالنسبة لـ O: مقدار اتجاهي يساوي $\vec{OA}\wedge m\vec{V}$ ونرمز له $\vec{\sigma_o}$ وبذلك نكتب:

$$\vec{\sigma_o} = \vec{OA}\wedge m\vec{V}$$

(٣) لتكن S مجموعة مادية مكونة من نقاط A_i ولتكن m_i كتل نقاطها وسرعاتها $\vec{V_i}$ في فضاء ثابت نظامي OXYZ عندئذ:

• كمية الحركة لـ S: هي متجه = $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V_i}$

حيث $\vec{V_i} = \frac{d\vec{OA_i}}{dt}$

و n عدد نقاط هذه المجموعة و $i = 1,2,\dots n$

وبالتالي نكتب

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\vec{V_i}$$

• الطاقة الحركية لـ S: مقدار عددي موجب ويساوي $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iV_i^2$ وبالتالي:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i.V_i^2$$

• العزم الحركي لـ S بالنسبة لـ O: مقدار إتجاهي = $\sum_{i=1}^{n}\vec{OA_i}\wedge m_i\vec{V_i}$ وبالتالي:

$$\vec{\sigma_o} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{OA_i}\wedge m_i.\vec{V_i})$$

ملاحظة: • السرعة في التعاريف مقدار متجهي.
• في حالة الجسم الصلب لحساب المقادير الحركية السابقة نحول المجموع $\sum$ إلى تكامل $\int$ ونأخذ بعين الاعتبار أن منطقة التكامل هي جسم الجسم أو المجموعة...

(٢) لتكن لدينا S جسم صلب و A نقطة منه وسرعتها $\vec{V}$ فيكون:

• كمية الحركة للجسم: هي متجه = $\int_S \vec{V}\,dm$ أي أن

$$\vec{P} = \int \vec{V}\,dm$$

• الطاقة الحركية للجسم S: مقدار عددي موجب ويكون

$$T = \frac{1}{2}\int V^2\,dm$$

• العزم الحركي للجسم S بالنسبة لـ مركز الدوران O: مقدار إتجاهي ويكون:

$$\sigma_o = \int_S(\vec{OA}\wedge\vec{V}).dm$$

مثال: لدينا مجموعة مادية مركزها C مؤلفة من نقاط A_i كتلتها m_i وسرعاتها $\vec{V_i}$ بالنسبة لـ $Oxyz$

جملة مقارنة منسوبة إلى الجملة المرجعية

أوجد علاقة كمية الحركة والطاقة الحركية والعزم الحركي لهذه الجملة.

الحل:

① كمية الحركة:

إن كمية الحركة لهذه الجملة هي

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V_i}$$

ولكن

$$\vec{V_i} = \frac{d\vec{OA_i}}{dt}$$

ومن شال

$$\vec{OA_i} = \vec{OC} + \vec{CA_i}$$

وبالتالي نشتق الطرفين

$$\Rightarrow \vec{V_i} = \vec{V}(C/O) + \vec{V}(A_i/C)$$

حيث C هي امتداد لـ $CXYZ$

الثابتة $OZ \parallel CZ$, $OX \parallel CX$, $OY \parallel CY$

و O امتداد لـ $OXYZ$ "

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{OA_i}}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{OC}}{dt} + \frac{d\vec{CA_i}}{dt}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{d}{dt}\vec{OC} + m_i \frac{d}{dt}\vec{CA_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{OC}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{CA_i}}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \cdot \vec{OC}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \cdot \vec{CA_i})$$

لأن المشتق مشترك ثابت

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d\vec{OC}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{CA_i}$$

من تعريف مركز الثقل:

$$\sum m_i \vec{OA_i} = \left(\sum m_i\right) \vec{OC}$$

وبالتالي:

$$\sum m_i \vec{CA_i} = \left(\sum m_i\right) \vec{CC} = 0$$

ومنه

$$\vec{P} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{V}(C/O) + \frac{d}{dt} \cdot 0$$

$$\vec{P} = M \cdot \vec{V}(C/O)$$

② الطاقة الحركية:

إن الطاقة الحركية لهذه الجملة:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i V_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{OA_i}}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{OA_i}}{dt}\right)^2$$

ومن شال السابقة:

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}(\vec{OC} + \vec{CA_i})\right]^2$$

الموضوع

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\frac{d\vec{OC}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vec{CA_i}}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\vec{OC}}{dt}\cdot\frac{d\vec{CA_i}}{dt} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_i \sum_{i=1}^{n} \left[V^2_{(C/O)} + V^2_{(A_i/C)} + 2\vec{V}_{(C/O)}\cdot\frac{d\vec{CA_i}}{dt} \right]$$

نوزع المجموع m_i ...

$$T_O = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V^2_{(C)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V^2_{(A_i/C)} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_{(C/O)}\cdot\frac{d\vec{CA_i}}{dt} \quad (\star)$$

الحد الأول: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V^2_{(C)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) V^2_{(C/O)} = T_O(C)$

أي الطاقة الحركية لـ C بالنسبة لـ O.

الحد الثاني: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V^2_{(A_i/C)} = T_C(S)$

أي الطاقة الحركية للجملة S بالنسبة لـ C.

الحد الثالث: $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_O(C)\cdot\frac{d\vec{CA_i}}{dt} = \vec{V}_O(C)\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{CA_i}}{dt}$

$$= \vec{V}_O(C)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{CA_i}\right)$$

$$= \vec{V}_O(C)\cdot\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{CA_i}\right)$$

كما سبق

$$\sum m_i \vec{CA_i} = \left(\sum m_i\right)\vec{CC} = 0$$

نعوض ما سبق في $(\star)$ فنجد:

$$T_O(S) = T_O(C) + T_C(S)$$

وهي نظرية كونيغ في الطاقة الحركية.

حيث: هي حركة الجملة حول مركز الكتلة.
وبذلك نرى حساب الطاقة الحركية وعزم الحركة: ① العزم، ② نظرية كونيغ

② العزم الحركي:

لدينا عزم كمية الحركة من التعريف

$$\vec{\sigma}_O(S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i}\wedge m_i\vec{V_i}$$

وحسب شال ...

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\vec{OC}+\vec{CA_i}\right]\wedge m_i\left[\vec{V}_O(C)+\vec{V}_C(A_i)\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{OC}\wedge m_i\vec{V}_O(C) + \vec{OC}\wedge m_i\vec{V}_C(A_i) + \vec{CA_i}\wedge m_i\vec{V}_O(C) + \vec{CA_i}\wedge m_i\vec{V}_C(A_i)\right]$$

نوزع المجموع $\sum$ على الحدود +

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{OC}\wedge m_i\vec{V}_C\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{OC}\wedge m_i\vec{V}_C(A_i)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{CA_i}\wedge m_i\vec{V}_O(C)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{CA_i}\wedge m_i\vec{V}_C(A_i)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_O(S) = \vec{OC}\wedge\left(\sum m_i\right)\cdot\vec{V}(C/O)$$

تعريف عزم كمية الحركة لنقطة

$$+ \vec{OC}\wedge\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\cdot\vec{V}(A_i/C)$$

اشتقاق كمية الحركة = 0

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{CA_i}\right)\wedge\vec{V}_O(C)$$

$$= \left(\sum m_i\right)\vec{CC} = 0$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{CA_i}\wedge m_i\cdot\vec{V}(A_i/C)\right)$$

حسب التعريف العزم الحركي للمجموعة بالنسبة إلى جملة مقارنة مرتبطة بـ C هو $\vec{\sigma}_C(S)$

AL AZIZ

الموضوع

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_O(C) + \vec{\sigma}_C(S)$$

وتسمى علاقة كونيغ الثانية في العزم الحركي.

حيث $\vec{\sigma}_O(C)$ عزم كمية حركة مركز الجملة C بالنسبة لـ O

• $\vec{\sigma}_C(S)$ عزم كمية الحركة للجملة (S) بالنسبة إلى مركزها C

• انتهت المحاضرة الأولى •

في النص

توابع المحاضرة الأولى:

• لتكن A نقطة مادية سرعتها $\vec{v}$ وكتلتها m عندئذ:

- $\vec{P} = m\vec{v}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{OA_i}}{dt}$
- $T = \frac{1}{2} m v^2$
- $\vec{\sigma}_O = \vec{OA_i} \wedge m\vec{v}$

• إذا كانت S مجموعة نقاط مادية نقاطها A_i عندئذ:

- $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$; $\vec{v}_i = \frac{d\vec{OA_i}}{dt}$
- $T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- $\vec{\sigma}_O(S) = \sum (\vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i)$

• إذا كان S جسم صلب عندئذ:

$$\vec{P} = \int \vec{v}\, dm$$

$$T = \int \frac{1}{2} v^2\, dm$$

$$\vec{\sigma}_{O_S} = \int (\vec{OA_i} \wedge \vec{v})\, dm$$

• إذا كان لدينا جملة نقاط مادية S مركزها C عندئذ:

$$\vec{P} = (\sum m_i)\, \vec{v}_{C/O} = M \vec{v}_{C/O}$$

$T = T_{C/O} + T_{S/C}$ كونيغ الأولى

$\vec{\sigma}_O(S) = \vec{\sigma}_O(C) + \vec{\sigma}_C(S)$ كونيغ الثانية

ملاحظة: $\sum m_i \vec{CA_i} = \sum m_i \vec{CC} = 0$